MONOGRAFÍAS DE POLINOMIOS ORTOGONALES, ECUACIONES FUNCIONALES Y APLICACIONES

Funciones especiales y matrices aleatorias. Nuevas tendencias en análisis asintótico complejo con aplicaciones en ecuaciones funcionales

Alfredo Deaño
Alberto Lastra

UAH

01

Monografías de polinomios ortogonales, ecuaciones funcionales y aplicaciones

Funciones especiales y matrices aleatorias. Nuevas tendencias en análisis asintótico complejo con aplicaciones en ecuaciones funcionales

UAH

Monografías de polinomios ortogonales, ecuaciones funcionales y aplicaciones

Funciones especiales y matrices aleatorias. Nuevas tendencias en análisis asintótico complejo con aplicaciones en ecuaciones funcionales

Alfredo Deaño
Alberto Lastra

Universidad de Alcalá
EDITORIAL UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado

Plaza de San Diego, s/n
28801 Alcalá de Henares
www.uah.es

I.S.B.N.:978-84-18979-80-4

Composición: Solana e Hijos, A. G., S.A.U.
Impresión y encuadernación: Solana e Hijos, A.G., S.A.U.

Impreso en España

Prefacio

El presente volumen pretende recoger los dos cursos doctorales que se desarrollaron en la I Escuela Doctoral de la Red Iberoamericana de Investigadores en Polinomios Ortogonales, Ecuaciones Funcionales y Aplicaciones (RIPOEFA), del 20 al 23 de septiembre de 2021, de forma virtual.

Enlaces a los vídeos de ambos cursos pueden encontrarse en la web de la red:

https://ripoefa.com/

En el primer curso, impartido por el profesor Alfredo Deaño, de la Universidad Carlos III de Madrid, se presentó el estudio de ciertas colectividades (ensembles) de matrices aleatorias por medio de polinomios ortogonales en la recta real. El ejemplo principal viene dado por el GUE (Gaussian Unitary ensemble). Esta metodología, junto con estimaciones asintóticas de los polinomios ortogonales y cantidades asociadas, permite obtener información acerca de las cantidades relevantes sobre los autovalores de dichas matrices y sobre la correspondiente función de partición, cuando el tamaño de las matrices tiende a infinito.

En el segundo curso, impartido por el profesor Alberto Lastra, de la Universidad de Alcalá, se presentó una breve introducción a la teoría clásica acerca de los desarrollos asintóticos en el vértice de sectores complejos y resultados relativos a la sumabilidad de soluciones formales de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los conceptos teóricos han sido sustentados y motivados a partir de ejemplos anteriores, y que son actualmente objeto de estudio, como las asociadas a ecuaciones en $q-$diferencias y $q-$análogo de sumabilidad, desarrollos asintóticos generales y sumabilidad general, etc.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

La presente monografía pretende introducir al lector en el estado del arte en dos temas de investigación actual en Matemática Aplicada. Por un lado, el estudio de funciones especiales de la Física Matemática y de matrices aleatorias, y por otro el análisis asintótico de ecuaciones funcionales en el dominio complejo.

Más concretamente, los objetivos de esta monografía son:

- Motivar al lector a conocer acerca de los temas trabajados en la monografía, así como presentar referencias bibliográficas para el estudio en más detalle y de temas relacionados.

- Proporcionar una breve introducción a las funciones especiales clásicas de la Física Matemática y algunas de sus propiedades, así como a temas relacionados más recientes, como funciones de Painlevé y problemas de tipo Riemann–Hilbert para funciones especiales y para polinomios ortogonales (Capítulo 1).

- Dar conceptos básicos de desarrollos asintóticos de tipo Poincaré (Capítulo 2). Este estudio está motivado por aplicaciones a las funciones especiales descritas anteriormente, pero se amplía en otras direcciones en los Capítulos 5 y 6 de la monografía.

- Introducir brevemente el análisis de colectividades de matrices aleatorias (Capítulo 3), para lo cual combinaremos técnicas de polinomios ortogonales en la recta real con resultados de análisis asintótico.

- Conocer la motivación histórica del uso de los desarrollos asintóticos para funciones de variables compleja cerca de un punto señalado (Capítulo 4).

- Conocer el concepto de desarrollo asintótico de una función en sectores del plano complejo y sus propiedades (Capítulo 5).

- Explorar los resultados más clásicos sobre funciones con desarrollo asintótico Gevrey, y su aplicabilidad en la sumabilidad y multisumabilidad de soluciones formales de ecuaciones funcionales (Capítulo 5).

- Conocer algunas de las tendencias actuales derivadas de las teorías más clásicas sobre sumabilidad (Capítulo 6): el principal objeto de estudio son las ecuaciones en $q-$diferencias y crecimiento $q-$Gevrey, desarrollos asintóticos asociados a sucesiones fuertemente regulares, resultados de tipo Maillet y la utilización de herramientas clásicas como el polígono de Newton, o la aplicabilidad de la teoría de sumabilidad al estudio asintótico de las soluciones analíticas y formales de ecuaciones funcionales bajo la acción de un parámetro singular.

La primera parte del monográfico está dedicada a las funciones especiales de la Física Matemática y a su relación con las matrices aleatorias, y se estructura en tres capítulos.

En el Capítulo 2, presentamos varios ejemplos de funciones especiales clásicas (funciones Gamma y Beta de Euler, de Airy, Bessel, hipergeométricas, polinomios ortogonales clásicos), así como una breve introducción a las soluciones de ecuaciones diferenciales de Painlevé, que constituyen un análogo no lineal más reciente y con diversas aplicaciones. Introducimos también la formulación de polinomios ortogonales en un problema de tipo Riemann–Hilbert en el plano complejo, que es una idea que ha proporcionado una cantidad ingente de resultados (algebraicos, diferenciales y asintóticos) en las últimas décadas.

Con el fin de tratar las aplicaciones de funciones especiales y polinomios ortogonales en el área de matrices aleatorias, necesitamos introducir las ideas esenciales de desarrollos asintóticos, que vemos en el Capítulo 4. En el contexto de aproximaciones asintóticas para funciones especiales, nos limitamos a estudiar desarrollos asintóticos de tipo Poincaré, fundamentalmente a partir de representaciones integrales de funciones especiales. Es importante señalar que este tema se amplía considerablemente en la segunda parte del monográfico, con un enfoque alternativo basado en ecuaciones diferenciales.

A continuación abordamos el análisis de colectividades de matrices aleatorias desde el punto de vista de sistemas integrables. Bajo esta perspectiva, nos concentramos en conjuntos de matrices con estructura (fundamentalmente matrices Hermíticas), en los que construimos una ley de probabilidad que es invariante bajo transformaciones unitarias. Esta idea se remonta a los trabajos pioneros de E. Wigner, quien empleó matrices aleatorias en el modelado estadístico de resonancias de átomos pesados, y dicha invariancia responde a propiedades físicas esenciales del sistema. Al mismo tiempo, esta estructura permite aplicar técnicas de cálculo basadas en polinomios ortogonales en la recta real para analizar propiedades (globales y locales) del espectro, cuando el tamaño de las matrices tiende a infinito. En este régimen es donde el estudio asintótico de polinomios ortogonales es fundamental, por medio (por ejemplo) del método de descenso más rápido (*steepest descent*) de Deift y Zhou para problemas de tipo Riemann–Hilbert. Presentamos brevemente esta metodología, junto con conceptos esenciales como medidas de equilibrio y universalidad.

La segunda parte del monográfico está dedicada al estudio asintótico de soluciones de ecuaciones funcionales; principalmente de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta parte comienza con un capítulo introductorio que pretende acercar al lector a los problemas que surgen a la hora de buscar soluciones holomorfas en un entorno del dato de Cauchy de problemas diferenciales sencillos. Concretamente, se exponen problemas de Cauchy asociados a ecuaciones de primer orden, que servirán de trampolín en el siguiente capítulo a la hora de motivar las herramientas asintóticas que se exponen. Así, el Capítulo 5 plantea una serie de problemas de Cauchy concretos, cuya resolución no necesita de las herramientas que se expondrán a lo largo de la exposición, pero que ayudarán a motivar la necesidad de los desarrollos asintóticos em el estudio de las soluciones de ecuaciones funcionales. Concretamente, se hace observar al lector a partir de estos ejemplos iniciales que es posible encontrar soluciones formales a problemas diferenciales cuyo radio de convergencia es nulo, y por tanto no determinan una solución analítica en un entorno del dato de Cauchy. Los ejemplos se eligen de forma que en el Capítulo 6 se haya motivado la necesidad de una herramienta asintótica que enlace las soluciones formales con las soluciones analíticas de alguna manera. Así, en un problema diferencial puede ser relativamente sencillo encontrar una solución formal, y a partir de técnicas y algoritmos que se expondrán posteriormente poder obtener desde la solución formal una solución analítica al problema que se relaciona con la primera en términos asintóticos.

En el Capítulo 6 se recuerdan los resultados más clásicos sobre los espacios de funciones con desarrollo asintótico y con desarrollo asintótico de tipo Gevrey, y se conduce al lector al concepto de sumabilidad, que garantiza la asociación unívoca de una solución analítica al problema de partida, desde una solución formal. También se expone el proceso de sumación Borel-Laplace, que establece el procedimiento algorítmico a seguir para recuperar la solución analítica a partir de la formal, y que será complementado con el más general proceso de multisumabilidad.

En el Capítulo 7 se proponen al lector distintas formas en las que la teoría clásica ha ido evolucionando en los últimos años. Por un lado, se expone el concepto de desarrollo asintótico $q-$Gevrey, asociado a la resolución de ecuaciones en $q-$diferencias, y que intenta emular la teoría clásica en este contexto. Por otro lado, los desarrollos asintóticos con cotas más generales (no necesariamente de tipo Gevrey, pero sujetas a ciertas propiedades que dejan fuera las sucesiones $q-$Gevrey) han sido objeto de estudio y son de interés en la actualidad por su versatilidad a la hora de ser aplicadas en distintos problemas como los problemas en los que intervienen derivadas de tipo fraccionario. Además, se expone brevemente la noción de un problema de tipo Maillet y se relaciona con el polígono de Newton. El primero supone un problema asociado a la sumabilidad, y que lo precede en el sentido que nivela las cotas de los coeficientes de una solución formal a un problema, y que resulta ser el primer paso para un proceso de sumabilidad Borel-Laplace. Por otro, el polígono de Newton es una herramienta de uso común en el estudio de la multisumabilidad. Se hace una mención a los problemas de perturbación singular en los que los desarrollos asintóticos y la sumabilidad han sido de gran provecho para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones cuando el parámetro de perturbación singular es próximo al origen.

El enlace entre las dos partes de la monografía se sustenta en varios puntos. El estudio de funciones especiales tiene interés por sí mismo pues el conocimiento de dichas funciones y su comportamiento ayuda a entender otros fenómenos en los que estas aparecen naturalmente. Así, las funciones Gamma y Beta de Euler aparecen de forma natural a la hora de estudiar los desarrollos asintóticos de funciones que son soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. De hecho, las sucesivas derivadas de las soluciones se acotan en términos de la evaluación de la función Gamma en valores determinados por el orden de derivación. Las propiedades algebraicas de los espacios funcionales que sustentan la teoría de los desarrollos asintóticos Gevrey provienen de las buenas propiedades de esta función especial clásica. Por otra parte, las funciones de Airy y de Bessel juegan también un papel importante en la teoría de sumabilidad, como se sigue de la referencia [49] y el estudio asintótico de la ecuación de Airy.

En la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) lineales, las soluciones se escriben en forma de serie de potencias convergentes, de forma que las singularidades de la EDO son a lo sumo de tipo regular. Esto conduce a soluciones que se pueden representar directamente por medio de funciones especiales, como por ejemplo las funciones hipergeométricas de Gauss. Sin embargo, cuando estas ecuaciones diferenciales poseen singularidades irregulares, la teoría de sumabilidad juega un papel fundamental a la hora de encontrar soluciones analíticas a partir de series de potencias formales, que resultan ser, por lo general, divergentes. En este sentido, el análisis asintótico descrito en el Capítulo 2 no es otro que aquel usado para describir los desarrollos asintóticos en las ecuaciones funcionales, y su aproximación al menor término el truncamiento adecuado de la solución formal al problema.

Otra conexión más se observa a la hora de estudiar los momentos de las medidas que definen familias de polinomios ortogonales. Estas sucesiones de momentos, bajo ciertas condiciones, resultan ser sucesiones fuertemente regulares asociadas a las cotas de las derivadas de funciones con desarrollo asintótico general en sectores del plano complejo. De hecho, la derivada usual resulta ser la derivada de momentos asociada a la sucesión de momentos de la medida asociada a los polinomios de Laguerre clásicos, es decir, de la función Gamma... una vez más. No solo estos momentos, sino también otros más generales, también asociados a la función Gamma permitirán describir las llamadas ecuaciones diferenciales fraccionarias (con derivadas de Caputo) desde operadores de derivadas de momentos.

Los autores quieren dejar constancia de su agradecimiento al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alcalá por su apoyo a este proyecto, así como a los revisores de la monografía por las sugerencias realizadas, que han ayudado a mejorar considerablemente el resultado final.

Parte I

Funciones especiales y matrices aleatorias

Introducción

El objetivo de estas notas es explicar al relación que existe entre las teoría de funciones especiales de la Física Matemática y las matrices aleatorias, entendidas estas desde la perspectiva de colectividades de matrices $N \times N$ como la GUE (Gaussian Unitary Ensemble). Las funciones especiales son elementos habituales del análisis matemático clásico, y aparecen en varias áreas de las Matemáticas, así como en diversas aplicaciones en Física e Ingeniería. Por otro lado, la teoría de matrices aleatorias es un campo muy amplio y que ha vivido un gran desarrollo en las últimas décadas, con contribuciones importantes desde sistemas integrables, probabilidad y estadística.

La conexión entre matrices aleatorias y funciones especiales se suele establecer en el marco de colectividades de matrices con una cierta estructura (matrices hermíticas o simétricas, por ejemplo), en las que imponemos una ley de probabilidad que presenta invariancia bajo transformaciones unitarias. En este contexto, es posible analizar objetos importantes, tales como distribución (macroscópica y microscópica) de autovalores o el comportamiento de la función de partición de dicha colectividad, por medio de polinomios ortogonales y elementos de la teoría de sistemas integrables.

En el capítulo 1 exponemos brevemente las funciones especiales clásicas que necesitaremos, que incluyen las funciones Gamma y Beta de Euler, así como las funciones hipergeométricas desde la perspectiva de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden 2. Prestamos especial atención a las funciones de Airy y Bessel, que utilizaremos más adelante, así como a los polinomios ortogonales en la recta real. Tratamos brevemente problemas de Riemann–Hilbert para polinomios ortogonales y para funciones especiales, e incluimos una sección de funciones de Painlevé, como análogos no lineales de las funciones especiales clásicas.

El capítulo 2 está dedicado a exponer ideas clásicas de análisis asintótico. La construcción de desarrollos asintóticos para funciones especiales es relevante no solamente por su utilidad en el estudio de dichas funciones, sino también con vistas a las aplicaciones como las que veremos en el último capítulo.

En el capítulo 3 exploramos la conexión entre funciones especiales (y en particular polinomios ortogonales) y la teoría de matrices aleatorias. En este contexto, los polinomios ortogonales son una herramienta muy útil para el estudio estadístico de dichas matrices aleatorias (tanto de autovalores como de la función de partición), y en concreto en el límite cuando el tamaño de dichas matrices tiende a infinito. En este análisis presentaremos (brevemente) el método de descenso más rápido de Deift y Zhou para problemas de tipo Riemann–Hilbert asociados a polinomios ortogonales en la recta real, así como otras ideas relacionadas, tales como medidas de equilibrio y universalidad.

Capítulo 2

Funciones especiales

2.1 Introducción

Las funciones especiales son objetos clásicos que aparecen en muchas áreas de las Matemáticas, como análisis matemático, análisis numérico, teoría de números o probabilidad, además de en aplicaciones en Física, Astronomía o Ingeniería. De una manera general y poco rigurosa, una función especial es aquella que no pertenece a las llamadas funciones elementales (polinomios, funciones racionales, exponencial y logaritmo, trigonométricas) y que además tiene un interés particular desde el punto de vista matemático o en aplicaciones. Como ejemplos tenemos la función Gamma de Euler, la función Zeta de Riemann, las funciones de Airy, funciones de Bessel o los armónicos esféricos.

El objetivo de este capítulo es dar una introducción breve a las funciones especiales y sus propiedades. Clasificar las funciones especiales de una manera sistemática es complicado y hasta cierto punto arbitrario, puesto que muchas de ellas están motivadas por razones históricas o por diversas aplicaciones donde aparecen. A modo de ejemplos, las funciones de Legendre aparecen en problemas de potencial (gravitatorio o electrostático) que presentan simetría esférica, véase por ejemplo [40, Capítulo 8]; las funciones de Bessel surgen de manera natural en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales lineales (como la ecuación de Laplace o la ecuación de ondas) en dominios con simetría radial [40, Capítulos 5 y 6]; la función Zeta, estudiada primero por Euler y después por Riemann, es fundamental en teoría de números, en relación con la distribución de números primos, [26]; y los polinomios ortogonales clásicos (Jacobi, Laguerre, Hermite) son esenciales en análisis numérico (en concreto, en la construcción de reglas de cuadratura Gaussiana) y también en teoría de aproximación y métodos espectrales para ecuaciones diferenciales, véase por ejemplo [45] o la referencia reciente [60].

Las funciones especiales no se pueden reducir en general a funciones elementales, y por ello muchas de sus propiedades y su evaluación numérica dependen de diferentes identidades algebraicas y diferenciales que satisfacen. Por ejemplo, es habitual que podamos escribir una misma función como una serie de potencias (en un cierto dominio), mediante una representación integral (en la recta real o en el plano complejo), por medio de un cierto desarrollo asintótico, o como solución de una ecuación diferencial o de una ecuación en diferencias en algún parámetro.

Las funciones especiales clásicas aparecen estudiadas en una gran cantidad de referencias, como por ejemplo Andrews, Askey y Roy [3], Beals y Wong [6], Hochstadt [32], Lebedev [40] o Temme [55]. Algunos autores combinan la teoría de funciones especiales con temas relacionados, como el análisis asintótico, en el caso de F. W. J. Olver [50], o con aspectos numéricos como Gil, Segura y Temme [31]. Asimismo, es importante mencionar como referencia clásica el Handbook of Mathematical Functions, editado por Abramowitz y Stegun [1], que ha sido recientemente revisado y ampliado en la Digital Library of Mathematical Functions [25], un recurso online de enorme valor.

En estas notas presentamos brevemente las funciones Gamma y Beta de Euler y después las funciones hipergeométricas; estas constituyen una gran familia de funciones especiales que se pueden estudiar de forma sistemática con la teoría clásica de ecuaciones diferenciales lineales y resolver por medio de serie de potencias. También resaltamos de una forma especial, por la importancia que tienen en el tema de matrices aleatorias, las funciones de Airy y los polinomios ortogonales en la recta real.

2.2 Las funciones Gamma y Beta de Euler

Las funciones Gamma y Beta son las primeras funciones especiales que se suelen estudiar, y aparte de su importancia histórica son relevantes puesto que aparecen en la construcción de otras funciones especiales más complicadas.

La función Gamma aparece en los trabajos de L. Euler, en relación con el problema de interpolar la función factorial a números reales positivos, no necesariamente enteros. Una forma de construir la función es por medio de la integral de Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{2.1}$$

que define una función analítica en dicho semiplano $\mathrm{Re}\, z > 0$. A partir de esta expresión podemos comprobar, aplicando integración por partes, que $\Gamma(n+1) = n!$, cuando $z = n \geq 0$ es un entero no negativo. Este cálculo además muestra la identidad funcional de la función Gamma:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

que es esencialmente la propiedad del factorial para números enteros positivos. Esta identidad permite además extender la función $\Gamma(z)$ a una función meromorfa en el plano complejo, calculando $\Gamma(z)$ a partir de $\Gamma(z+1)$, con polos en los enteros negativos $z = -n = 0, -1, -2, \ldots$ y residuos $(-1)^n/n!$ en dichos puntos.

La función Beta de Euler se puede definir también por medio de una integral real:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \qquad p, q > 0, \tag{2.2}$$

y está relacionada con la función Gamma por medio de la identidad

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Esta identidad permite probar otra identidad importante de la función Gamma, que es la fórmula de reflexión:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad z \notin \mathbb{Z}.$$

Existen otras representaciones integrales de las funciones Beta y Gamma en el plano complejo, que tienen la ventaja de que no imponen restricciones en el valor de z o los parámetros, como ocurre con las integrales reales. La fórmula debida a Hankel es

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} s^{-z} e^s ds, \qquad z \in \mathbb{C},$$

donde el contorno de integración $\mathcal{L}$ empieza en ∞ con $\arg s = -\pi$ y termina en ∞ con $\arg s = \pi$, rodeando una vez el origen en sentido positivo.

Existen muchas más identidades y propiedades conocidas para estas dos funciones, como expresiones en forma de productos infinitos y aproximaciones asintóticas como la conocida fórmula de Stirling, que se pueden consultar en cualquier libro de funciones especiales.

2.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Una gran familia de funciones especiales clásicas, las **funciones hipergométricas** de Gauss y Kummer, aparecen como soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) lineales de segundo orden con coeficientes racionales. Este tipo de EDOs resulta de aplicar el método de separación de variables (en distintos sistemas de coordenadas) a la ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

donde $u = u(x, y, z)$ y k es una constante. Si $k = 0$ tenemos la ecuación de Laplace. En coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, la ecuación de Helmholtz se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0.$$

Si buscamos soluciones en forma de variables separadas, $u(r, \theta, z) = f_1(r)f_2(\theta)f_3(z)$, obtenemos las siguientes EDOs: three ODEs:

$$\begin{aligned} f_1'' + \frac{1}{r}f_1' + \left(k^2 - \alpha^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right) f_1 &= 0, \\ f_2'' + \mu^2 f_2 &= 0, \\ f_3'' + \alpha^2 f_3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde α y μ son constantes. La segunda y la tercera ecuación se pueden resolver utilizando funciones elementales, $f_2(\theta) = e^{\pm i\mu\theta}$ y $f_3(z) = e^{\pm i\alpha z}$, pero la primera EDO en (2.3) requiere funciones especiales; es la **ecuación de Bessel**, que se resuelve en términos de funciones de Bessel (o cilíndricas): $f_1(r) = \mathcal{C}_\mu(r\sqrt{k^2 - \alpha^2})$.

De una manera similar, en coordenadas esféricas

$$x = r\sin\phi\cos\theta, \qquad y = r\sin\phi\sin\theta, \qquad z = r\cos\theta,$$

separación de variables en la ecuación de Helmholtz

$$u(r,\theta,\phi) = f_1(r)f_2(\theta)f_3(\phi)$$

resulta en las siguientes EDOs:

$$\begin{aligned} f_1'' + \frac{2}{r}f_1' + \left(k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\right) f_1 = 0, \\ \sin^2\theta f_2'' + \sin\theta\cos\theta f_2' + \left(\nu(\nu+1)\sin^2\theta - \mu^2\right) f_2 = 0, \\ f_3'' + \mu^2 f_3 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde μ y ν son constantes. La tercera EDO es elemental, con soluciones $f_3(\phi) = e^{\pm i\mu\phi}$, y la primera se puede resolver en términos de funciones de Bessel, $f_1(r) = r^{-1/2}\mathcal{C}_{\nu+1/2}(kr)$. La segunda EDO (con el cambio de variable $z = \cos\theta$) es la **ecuación de Legendre**:

$$(1-z^2)f_2''(z) - 2zy'(z) + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right) y(z) = 0, \tag{2.5}$$

y sus soluciones $f_2(\theta) = P_\nu^\mu(\cos\theta)$ vienen dadas por funciones de Legendre, o armónicos esféricos.

Otros ejemplos de separación de variables en diferentes geometrías se pueden encontrar en [55, Capítulo 10] o en [40, Capítulo 10].

La forma general de las EDOs que estudiaremos es la siguiente:

$$w''(z) + f(z)w'(z) + g(z)w(z) = 0, \tag{2.6}$$

donde asumiremos que los coeficientes $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas de z en $\mathbb{C}$, salvo por singularidades aisladas.

El conjunto de soluciones de (2.6) tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos. En completa analogía con las ideas de Álgebra Lineal, dicho conjunto de soluciones se puede generar por medio de combinaciones lineales de dos soluciones independientes, definidas del modo siguiente:

Definición 1 *Dos soluciones $w_1(z)$ y $w_2(z)$ son linealmente independientes en D si su Wronskiano*

$$W[w_1,w_2](z) = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix}$$

no se anula en D.

Teorema 1 *La solución general de* (2.6) *se puede escribir como combinación lineal de dos soluciones independientes* $w_1(z)$, $w_2(z)$ *en un dominio D:*

$$w(z) = Aw_1(z) + Bw_2(z),$$

donde A y B son constantes, que podemos determinar a partir de dos condiciones iniciales $w(z_0) = w_0$, $w'(z_0) = w'_0$.

La forma habitual de resolver este tipo de EDOs es por medio de soluciones en serie de potencias alrededor del punto $z = z_0$ (que no es necesariamente finito). Un resultado fundamental de la teoría de ecuacions diferenciales lineales es que el comportamiento de las soluciones en el entorno de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se puede investigar a partir de las propiedades de los coeficientes $f(z)$ y $g(z)$ en dicho punto. Más concretamente, decimos que $z = z_0$ es un

- **punto regular** si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en $z = z_0$.
- **punto singular regular** si $f(z)$ o $g(z)$ no son analíticas en $z = z_0$, pero $(z - z_0)f(z)$ y $(z - z_0)^2 g(z)$ lo son.
- **punto singular irregular** en otro caso.

El punto del infinito es de gran importancia en análisis asintótico de EDOs, y se puede analizar mediante el cambio de variable $z = 1/t$ y el estudio del punto $t = 0$ en la EDO resultante. La EDO transformada con este cambio es

$$\ddot{w}(t) + F(t)\dot{w}(t) + G(t)w(t) = 0, \tag{2.7}$$

donde $\dot{}$ indica diferenciación con respecto a t y los coeficientes son

$$F(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right), \qquad G(t) = \frac{1}{t^4} g\left(\frac{1}{t}\right). \tag{2.8}$$

Ejemplo 1 *A modo de ejemplos, la ecuación de Legendre* (2.5) *tiene tres puntos singulares regulares, en* $z = \pm 1$ *y en* $z = \infty$. *La ecuación de Bessel*

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0, \tag{2.9}$$

tiene un punto singular regular en $z = 0$ *y un punto singlar irregular en* $z = \infty$, *y la ecuación de Airy*

$$y''(z) - zy(z) = 0 \tag{2.10}$$

tiene un único punto singular irregular en $z = \infty$.