TEXTOS UNIVERSITARIOS
CIENCIAS

Cálculo en varias variables reales

Juan Gerardo Alcázar

UAH

Cálculo en varias variables reales

TEXTOS UNIVERSITARIOS
CIENCIAS

UAH

Plaza de San Diego, s/n
28801 Alcalá de Henares
www.uah.es

I.S.B.N.: 978-84-18979-89-7

Composición: Solana e Hijos, A. G., S.A.U.
Impresión y encuadernación: Solana e Hijos, A.G., S.A.U.
Impreso en España

Cálculo en varias variables reales

Juan Gerardo Alcázar

Universidad de Alcalá
EDITORIAL
UNIVERSIDAD DE ALCALÁ

Índice general

Introducción.

El objetivo primordial de estas notas es servir de referencia para los estudiantes de la asignatura de Cálculo II del Grado en Ingeniería de Telecomunicación de la Universidad de Alcalá (UAH). Las notas siguientes cubren la mayor parte de los temas fundamentales relativos al Cálculo en Varias Variables Reales: diferenciabilidad, optimización, integración sobre regiones planas y espaciales, integración de campos escalares y vectoriales sobre curvas y superficies, y análisis vectorial.

Aunque las notas están basadas en la experiencia del autor como profesor de la asignatura del mismo nombre en la Escuela Politécnica Superior de la UAH, el temario cubierto por la asignatura está presente de manera habitual en casi todas las escuelas de ingeniería, independientemente, incluso, del tipo de ingeniería de que se trate. Muchos de los temas que se tratan en ellas están presentes, también, de una u otra forma, en asignaturas generales de Matemáticas de grados relacionados con Ciencias. Por lo tanto, pueden ser de utilidad no sólo para los estudiantes de Ingeniería de Telecomunicación de la UAH, sino también para otros estudiantes de ingeniería o ciencias bien de la UAH, o de otras universidades.

En estas notas se ha priorizado una descripción intuitiva de los conceptos tratados, sin rehuir tampoco el rigor cuando es necesario, para justificar los resultados o las técnicas utilizadas. Se presenta también un buen número de ejemplos para ilustrar las diferentes cuestiones abordadas. Cuando ha sido posible, se han conectado los conceptos tratados con la Física, que incluso se utiliza para motivar algunos de los capítulos (por ejemplo, los relacionados con integración). En el texto se incluyen algunas demostraciones, pero no todas; algunas de ellas, al igual que algunas secciones, se han señalado con la etiqueta "opcional", entendiendo que no forman parte del cuerpo fundamental de la asignatura.

El contenido que se presenta es clásico, y proporciona un lenguaje necesario para muchas otras cuestiones relacionadas con la Ingeniería y la Matemática Aplicada. Como ejemplos podemos mencionar la Probabilidad, la resolución de Ecuaciones Diferenciales o la Optimización.

El lector descubrirá pronto que aunque los conceptos que se abordan aquí son, como no puede ser de otra manera, un tanto abstractos, es relativamente fácil visualizarlos y presentarlos de manera geométrica. Se ha realizado un esfuerzo especial para proporcionar gráficos que permitan adivinar cuáles son las ideas que se esconden detrás de las definiciones y teoremas. La experiencia del autor de estas notas es que, gracias a la posibilidad de visualizarlos, estos conceptos resultan más accesibles para los alumnos que otros que aparecen en otras ramas de las Matemáticas. En particular, y aunque lo deseable es que el lector de estas notas tenga una formación sólida en funciones de una variable, siempre que haya un mínimo conocimiento de la teoría de este tipo de funciones, los conceptos que se presentan aquí estarán al alcance de los estudiantes.

Siendo el contenido de estas notas tremendamente clásico, hay una variedad enorme de Bibliografía sobre el tema. Al final de estas notas se proporcionan algunas orientaciones bibliográficas, donde pueden encontrarse tanto exposiciones alternativas de la teoría que aquí se presenta, como cuestiones de ampliación, ejercicios y problemas sobre los distintos temas (que aquí no se proporcionan).

Capítulo 1

Funciones reales de varias variables.

Una **función** es una expresión (una fórmula, si se quiere) que describe la relación entre una cierta variable que nos interesa, y otra, u otras, de la(s) cuál(es) depende. Este tipo de expresiones son fundamentales, porque nos permiten *explicar* globalmente la variable que nos interesa a partir de las otras, y deducir su posible evolución según la evolución de las variables de las que depende. En particular, además, nos permiten determinar el valor de la variable de interés a partir de las demás (que a menudo son más sencillas de observar, o medir).

Dentro de las funciones el caso más simple es aquel en que la variable que nos interesa depende sólamente de otra; decimos que una función así es una *función de una variable.* Por ejemplo, la relación entre el lado ℓ de un cuadrado y su área A es $A = \ell^2$; la función $f(\ell) = \ell^2$ describe la relación entre A y ℓ.

Sin embargo, lo más habitual es que una variable dependa no de una única variable, sino de varias. Por ejemplo, la Ley de Ohm nos dice que

$$V = I \cdot R, \tag{1.1}$$

donde I es la intensidad que atraviesa un conductor, V la diferencia de potencial que aparece entre sus extremos y R la resistencia que ofrece el conductor al paso de la corriente. Por tanto la variable V depende de dos variables, I y R. Decimos que la expresión $f(I, R) = I \cdot R$, que describe la relación entre V y I, R, es una *función de dos variables.* Otro ejemplo: cuando una corriente continua de intensidad I atraviesa durante t segundos una resistencia R, el calor Q desprendido por la resistencia es

$$Q = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t. \tag{1.2}$$

En este caso Q depende de tres variables, I, R, t, y decimos que la expresión $f(I, R, t) = 0,24 \cdot I^2 \cdot R \cdot t$ es una *función de tres variables.*

Nuestro objetivo va a ser generalizar para funciones de varias variables algunos de los conceptos básicos que son familiares para funciones de una sóla variable, como por ejemplo: dominio, imagen, gráfica, límite, continuidad, etc. A lo largo de este proceso aparecerán distintos objetos geométricos (curvas en el plano, en el espacio, superficies en el espacio, regiones en el plano y el espacio, etc.) con los que será necesario familiarizarse, poco a poco. En general, presentaremos los resultados para funciones de dos variables, después tres variables, y después los generalizaremos a un número arbitrario de variables.

1.1. Definiciones básicas

En Matemáticas no nos interesa si en la expresión $f(I,R) = I \cdot R$, I representa la intensidad, ó R la resistencia. Para nosotros I, R son simplemente variables, cuya naturaleza no importa especialmente. Cuando tenemos una función de dos variables, habitualmente escribimos $f(x,y)$, o bien $z = f(x,y)$, para evidenciar que el resultado de la expresión $f(x,y)$ produce una nueva variable, a la que llamamos z. Con un poco más de formalidad, una **función (escalar) de dos variables** es una *aplicación*:

$$\begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) \end{array} \tag{1.3}$$

Expliquémonos un poco: una *aplicación* en Matemáticas es una regla que nos permite asociar a cada elemento de un conjunto de partida, un (y sólo uno!!) elemento de otro conjunto de llegada, del cuál se dice que es la *imagen* del primer elemento. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una aplicación que nos permite asociar a cada número real x otro número real, que es el cuadrado del primero: como $(-3)^2 = 9$, decimos que $f(-3) = 9$, es decir, que 9 es la imagen de -3 mediante la función f. En este caso, el conjunto de partida es $\mathbb{R}$, y el de llegada $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (es decir, el conjunto de los números reales positivos, junto con el cero). En el caso de (1.3), el conjunto de partida es un subconjunto D del plano, $\mathbb{R}^2$, el de llegada es $\mathbb{R}$, y la imagen de cada elemento de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es el valor $z = f(x,y)$. La razón por la que en general nos restringimos a un subconjunto D es que hay ciertos valores para los cuáles la expresión $f(x,y)$ puede no tener sentido, como veremos después. En realidad, D corresponde al **dominio** de la función $f(x,y)$, también representado a menudo por $\mathrm{dom}(f)$:

$$\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \exists f(x,y)\}. \tag{1.4}$$

En general, $\mathrm{dom}(f)$ es una *región* del plano.[1]

Para completar la tanda de definiciones antes de ver un ejemplo, definimos la **imagen** de f, $\mathrm{Im}(f)$, como el conjunto de números reales que corresponden al valor de la función f para algún $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es decir

$$\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} | \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = f(x,y)\} \tag{1.5}$$

[1]En el plano, el conjunto de puntos (x,y) tales que, por ejemplo, $x^2 + y^2 = 1$, representa una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Sin embargo, cuando escribimos $x^2 + y^2 \leq 1$, esta desigualdad representa todos los puntos del *círculo* centrado en el origen, de radio 1, borde incluido: es decir, los puntos de la circunferencia anterior, y todos los puntos del interior de la circunferencia. En el primer caso, $x^2 + y^2 = 1$, tenemos una *curva* plana. En el segundo caso, $x^2 + y^2 \leq 1$, una *región* plana. Intuitivamente, las curvas son "hilos", con longitud pero sin área, mientras que las regiones tienen "área"(en algún caso infinita, pero eso lo dejamos de momento!!)

Observemos que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo 1. *Consideremos la función* $f(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$*. La imagen de* $(1,4)$ *mediante* $f(x,y)$ *es* $f(1,4) = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$*. Sin embargo,* $f(1,-4) = \sqrt{1 \cdot (-4)} = \sqrt{-4}$ *no está definida en los números reales; por lo tanto,* $(1,-4) \notin dom(f)$*. En concreto, el dominio de* f *es*

$$dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \cdot y \geq 0\},$$

es decir, la unión del primer y tercer cuadrantes del plano xy*, incluyendo los ejes. La imagen, en cambio, sería el conjunto de números reales* z *que son de la forma* $\sqrt{x.y}$*, para algún valor de* x, y*. Podemos comprobar que cualquier número real no negativo es de esa forma, y por tanto* $Im(f) = [0, \infty)$*.*

Si tenemos una función de tres variables $f(x,y,z)$, (1.3), (1.4) y (1.5) se generalizan de manera natural. En concreto, formalmente una **función (escalar) de tres variables** es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & f(x,y,z) \end{array} \tag{1.6}$$

donde $D \subset \mathbb{R}^3$ es el **dominio** de f, es decir, el conjunto de puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donde $f(x,y,z)$ está definido, que ahora es, en general, una región del espacio, $\mathbb{R}^3$. El valor de f para un $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\omega = f(x,y,z)$, es la *imagen* de (x,y,z) mediante f. Nuevamente, definimos

$$\mathrm{Im}(f) = \{w \in \mathbb{R} | \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, w = f(x,y,z)\}$$

Ejemplo 2. *Consideremos la función* $f(x,y,z) = \sqrt{4 - (x^2+y^2+z^2)}$*. El dominio de* f *es*

$$dom(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 4 - (x^2+y^2+z^2) \geq 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 4\},$$

que corresponde a una esfera maciza[2] *centrada en el origen de coordenadas, y de radio 2. Además, como el menor valor que puede tomar* $\sqrt{4 - (x^2+y^2+z^2)}$ *es 0, y el mayor es 2, las imágenes de los puntos de* $dom(f)$ *están entre* 0 *y* 2*, de modo que* $Im(f) = [0, 2]$.

Pero no tenemos por qué limitarnos a dos o tres variables. En general, una **función escalar de varias variables** es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longrightarrow & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \tag{1.7}$$

[2] La expresión $x^2+y^2+z^2 = 4$ corresponde a la superficie esférica, pero no representa a los puntos del interior de la esfera. En cambio, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ representa la esfera maciza, es decir, la superficie esférica y todos los puntos del interior de la esfera; esto es lo que llamamos una *región* del espacio, es decir, una porción del espacio "con volumen".

El adjetivo "escalar", que también apareció antes, nos indica que la imagen de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un número real, y se utiliza para diferenciar estas funciones de las **funciones vectoriales**,

$$\begin{array}{rcl} D \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\vec{\mathbf{F}}} & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \overset{m}{\cdots}, f_m(x_1, \ldots, x_n)), \end{array} \tag{1.8}$$

en las cuáles la imagen de cada $(x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento de $\mathbb{R}^m$. Decimos que

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)$$

son las **componentes** de la función $\vec{\mathbf{F}}$. Cuando $n = m$, estas funciones se conocen como **campos vectoriales**; el campo eléctrico (en el plano, o el espacio) es un buen ejemplo. A menudo, en el caso de las funciones $\vec{\mathbf{F}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ los elementos de $\mathbb{R}^n$ (el conjunto de partida) se ven como "puntos", mientras que los elementos de $\mathbb{R}^m$ (el conjunto de llegada) se ven como vectores: es como si de cada punto de $\mathbb{R}^n$ *colgáramos* un vector de $\mathbb{R}^m$ (en general, variable).

Mencionemos también que en ocasiones utilizaremos la notación compacta $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (o también $\vec{\mathbf{x}}$) para referirnos a los elementos de $\mathbb{R}^n$.

1.2. Gráficas

Para una función de una variable, por ejemplo $f(x) = x^2$, la gráfica de la función es el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que $y = f(x)$, es decir, el conjunto de puntos de la forma $(x, f(x))$, con $x \in \mathbb{R}$; en el caso de $f(x) = x^2$, ese conjunto corresponde a la parábola $y = x^2$, que es una curva del plano. En el caso de una función escalar de dos variables $f(x, y)$, la **gráfica** $\mathcal{G}$ de $f(x, y)$ es el conjunto de puntos del espacio de la forma $(x, y, f(x, y))$, donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in \mathrm{dom}(f)\}.$$

Cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de $\mathrm{dom}(f)$ contribuye a la gráfica de f con el punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donde $z = f(x, y)$; siempre que f tenga condiciones de regularidad suficientes (es decir, que sea "suficientemente buena"), la gráfica corresponde a una *superficie* en el espacio (es decir, un "pañuelo", extendido en el espacio); véase Fig. 1.1.

Ejemplo 3. *Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. El dominio de esta función es*

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 4 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\},$$

es decir, el círculo (borde incluído) centrado en el origen, de radio 2. Por lo tanto, cada punto (x, y) de dicho círculo contribuye a la gráfica de la función con el punto (x, y, z) donde $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. La reunión de todos esos puntos nos da la gráfica de $f(x, y)$: elevando al cuadrado en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, tenemos $z^2 = 4 - x^2 - y^2$, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que

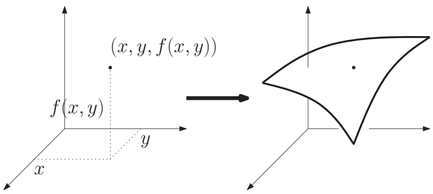

Figura 1.1: Gráfica de una función de dos variables.

corresponde a la superficie de una esfera centrada en el origen, de radio 2. La gráfica de la función no es toda la superficie esférica: si despejamos z *en* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$*, obtenemos* $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$*, donde el signo* $+$ *corresponde al hemisferio superior (es decir, la parte de superficie esférica por encima de* $z = 0$*), y el signo* $-$ *corresponde al hemisferio inferior (la parte de superficie esférica por debajo de* $z = 0$*). Por lo tanto, la gráfica de la función* $f(x, y)$ *es el hemisferio superior de la esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *(ver Fig. 1.2).*

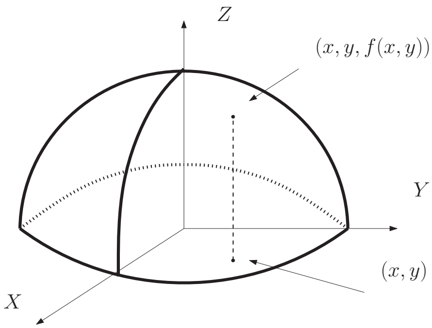

Figura 1.2: Gráfica de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Es importante enfatizar que la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *corresponde no a la esfera maciza, sino a la "cáscara"de la esfera!! Además, este ejemplo permite ilustrar bien el papel del dominio: observemos que si tomamos un punto* (x, y) *del interior de la circunferencia* $x^2+y^2 = 4$ *(es decir, del círculo limitado por ella), la vertical por dicho punto cortará a la semiesfera* $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *en otro punto cuya coordenada* z *es exactamente la imagen del punto* (x, y) *mediante* f*. Sin embargo, la vertical trazada por un punto* (x, y) *exterior al círculo no corta a la semiesfera anterior. De hecho, para un punto así no existe* $f(x, y)$*, porque* $x^2 + y^2 > 4$*, y por lo tanto el radicando de* $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *es negativo.*

Hemos hablado de que la gráfica de una función $f(x, y)$ es una superficie. Es importante familiarizarse con las distintas formas en que podemos definir una curva en el plano, o una superficie en el espacio. De momento (más adelante veremos otra posibilidad más), nos interesan dos posibilidades, que llamamos forma *explícita*, y forma *implícita*.

	Explícita	Implícita
Curvas en el plano	$y = f(x)$	$F(x, y) = 0$
Superficies en el espacio	$z = f(x, y)$	$F(x, y, z) = 0$

Por ejemplo, en el plano, $y = x^2$ (ó $y - x^2 = 0$) representa una curva, en concreto una parábola; decimos que está en forma explícita porque podemos despejar *explícitamente* el valor de y, en función de x. También en el plano, $x^2 + y^2 = 1$, ó $x^2 + y^2 - 1 = 0$, representa una curva, en este caso una circunferencia centrada en el origen, de radio 1. En este caso tenemos la curva definida de forma implícita, puesto que no podemos despejar y de forma única: al intentar despejar obtenemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Esto, por cierto, nos indica que la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de una función de una variable, aunque sí puede verse como la unión de las gráficas de *dos* funciones de una variable, en concreto $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$. En el espacio, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (véase Ejemplo 3) define explícitamente una superficie, el hemisferio superior de la esfera de centro el origen y radio 2; como en el caso de curvas, decimos que define explícitamente esa superficie porque la variable z aparecede despejada en función de x, y. En cambio, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, o bien $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, define implícitamente la superficie esférica de centro el origen y radio 2: si intentamos despejar z, aparece el $\pm$ del que hablábamos en el Ejemplo 3. De nuevo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no corresponde a la gráfica de una función de dos variables, sino a la unión de las gráficas de dos funciones de dos variables. Una observación importante: cuando examinamos una expresión del tipo $x^2 + y^2 = 1$ hay que comprobar en qué contexto nos encontramos, el plano o el espacio. Ciertamente, en el plano esta expresión corresponde a la circunferencia unidad. Pero en el espacio corresponde a todos los puntos (x, y, z) tales que (x, y) (su proyección sobre el plano XY) está en la circunferencia unidad, es decir, al cilindro (infinito) que se alza sobre la circunferencia unidad en el plano XY.

Para completar esta visión panorámica, vamos a hablar también de curvas en el espacio. Mientras que podemos imaginar una curva en el plano como un *hilo* que extendemos sobre un plano, si disponemos dicho hilo en el espacio sin que forzosamente haya un plano que lo contenga, tendremos una *curva espacial*. Para representar una curva en el espacio necesitamos no una, sino dos ecuaciones: en general $\{f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0\}$ representa la curva espacial que resulta al cortar la superficie $f(x, y, z) = 0$ con la superficie $g(x, y, z) = 0$. Si queremos referirnos a la circunferencia unidad situada sobre el plano $z = 0$, la ecuación de dicha curva, vista en $\mathbb{R}^3$, es $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$; recordemos que si simplemente escribimos $x^2 + y^2 = 1$, en $\mathbb{R}^3$ estamos describiendo un clindro!!!

Si tenemos una función de tres variables, $f(x, y, z)$, su gráfica se define como el subconjunto, en este caso de $\mathbb{R}^4$, definido del siguiente modo:

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z, f(x, y, z)) | (x, y, z) \in \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^3\}.$$

Puesto que se trata de un objeto que vive en $\mathbb{R}^4$, no podemos visualizarlo. De forma análoga, podríamos definir la gráfica de cualquier función escalar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $n > 3$; la gráfica de una función así es un objeto de $\mathbb{R}^{n+1}$, que no podemos visualizar tampoco.

1.3. Conjuntos de nivel.

Al contrario de lo que sucede con funciones de una variable, visualizar la gráfica de una función de dos variables, o en general visualizar una superficie definida explícita o implícitamente, no es en absoluto sencillo, ni siquiera posible siempre “a mano”. No obstante, vamos a ver una técnica que permite explorar este tipo de objetos, y que en casos no muy complicados sí permite visualizarlos completamente. Necesitamos la siguiente definición:

Definición 1. *La* **curva de nivel de valor c** *de una función de dos variables $f(x,y)$, es la curva del plano definida implícitamente por $f(x,y) = c$.*

Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2 + y^2$, la curva de nivel c de $f(x,y)$ es la curva $x^2 + y^2 = c$: obsérvese que si $c > 0$, se trata de una circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{c}$; si $c = 0$, la parte real de la curva se reduce al origen de coordenadas; si $c < 0$, la curva es vacía, es decir, no contiene puntos reales.

La utilidad de las curvas de nivel está en que nos permiten explorar superficies. Por ejemplo, consideremos la superficie definida (explícitamente) por $z = x^2 + y^2$, que es la gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$. Las curvas de nivel de $f(x,y) = x^2 + y^2$ han sido estudiadas en el párrafo anterior. Sabemos que la gráfica de $f(x,y)$ es una superficie, pero no sabemos qué aspecto tiene. Para averiguarlo, seccionamos la superficie por planos paralelos al plano XY, es decir, por planos de la forma $z = c$. Al cortar la superficie de esta manera, las curvas que vamos obteniendo son, precisamente, las curvas de nivel de $f(x,y) = x^2 + y^2$ (Fig. 1.3, izquierda). Como las curvas de nivel para $c < 0$ son vacías, deducimos que la superficie $z = x^2 + y^2$ no tiene puntos reales por debajo del plano $z = 0$, es decir, el plano XY. Además, para $c = 0$ la curva de nivel se reduce a un punto, $(0,0)$, lo que nos indica que la intersección de $z = x^2 + y^2$ con $z = 0$ se reduce al origen de coordenadas. Finalmente, para $c > 0$ tenemos circunferencias de centro el origen, y radio $\sqrt{c}$. Esto nos dice que las intersecciones con los planos $z = c$, $c > 0$, son circunferencias, cuyo centro es el punto de intersección del plano $z = 0$ con el eje z, y cuyo radio es tanto mayor cuanto más ascendemos por el eje z. Para acabar de visualizar la superficie, debemos saber cómo conectar todas esas curvas de nivel: para ello, intersecamos la superficie con el plano YZ, cuya ecuación es $x = 0$; al hacer esto obtenemos la curva $z = y^2$, que corresponde a una parábola de vértice el origen, situada en el plano YZ (Fig. 1.3, centro). Finalmente, ya podemos hacernos una idea de cómo es la superficie (Fig. 1.3, derecha).

Las intersecciones de una superficie con los planos coordenados reciben el nombre de **trazas** de la superficie. A partir del ejemplo de $z = x^2 + y^2$, una estrategia posible para visualizar la gráfica de $z = f(x,y)$ es: (1) estudiar las curvas de nivel de $f(x,y)$; (2) estudiar la traza con el plano YZ. De modo similar, cuando tenemos una superficie definida implícitamente por $f(x,y,z) = 0$, una posibilidad para estudiar su forma es seccionar la superficie con planos de la forma $z = c$, lo cuál da lugar a las curvas $f(x,y,c) = 0$, y después seccionar la superficie con el plano YZ, lo cuál corresponde a la curva $f(0,y,z) = 0$ (situada en el plano YZ). Finalmente, en algunos casos, en lugar de estudiar las secciones con planos $z = c$ y la traza con YZ, puede interesar estudiar otro tipo de secciones: por ejemplo, en el caso de $z = y^2 - x^2$, puede ser más útil observar que las secciones de la superficie con

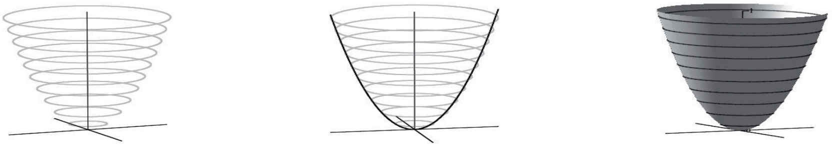

Figura 1.3: Curvas de nivel, traza con el plano YZ y gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$

planos $y = c$ nos dan parábolas, que "penden"de la traza con el plano YZ, que es la parábola $z = y^2$, situada en el plano YZ. A partir de ello, es posible deducir que la forma de $z = y^2 - x^2$ es la de una "silla de montar"(más formalmente, paraboloide hiperbólico): en Fig. 1.4 podemos ver la gráfica de $z = y^2 - x^2$, en la cuál se ha destacado la parábola $\{y = z^2, x = 0\}$ (en línea gruesa), y algunas parábolas que penden de ella (en línea menos gruesa).

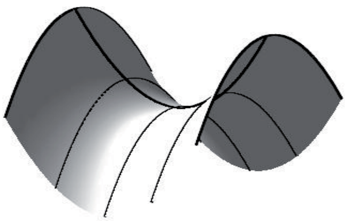

Figura 1.4: Gráfica de $z = y^2 - x^2$

En las diapositivas de teoría veremos más ejemplos de superficies, en concreto las **superficies cuádricas**. Estas son superficies definidas implícitamente por un polinomio de segundo grado en las variables x, y, z, es decir, superficies de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0.$$

Cuando tenemos una función $f(x, y, z)$ definimos la **superficie de nivel c** como la superficie (implícita) $f(x, y, z) = c$. Aunque esto no nos permite visualizar la gráfica de f, que como dijimos antes es un objeto de $\mathbb{R}^4$, sí nos permite explorar algunas de sus propiedades, hasta cierto punto. Por ejemplo, las superficies de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son esferas para $c > 0$, que se reducen a un punto, el origen de coordenadas, para

$c = 0$, y que son vacías para $c < 0$. Análogamente, para funciones $f(x_1, \ldots, x_n)$, con $n < 3$ hablamos de *hipersuperficies de nivel.*

1.4. Límites de funciones de varias variables: idea intuitiva.

Revisemos la noción de límite para funciones de una variable. Intuitivamente, decimos que el **límite de la función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0 es ℓ, y escribimos $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, cuando a medida que x se aproxima a x_0, los valores de $f(x)$, es decir, de la función, se hacen más y más próximos a ℓ. En el caso de funciones de una variable no hay más que dos maneras de aproximarse a x_0: por valores ligeramente superiores, es decir, por la *derecha* de x_0, o por valores ligeramente inferiores, es decir, por la *izquierda* de x_0 (véase Fig. 1.5).

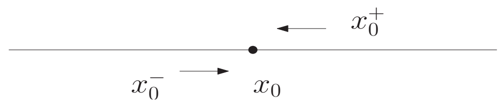

Figura 1.5: Aproximación $x \to x_0$

Cuando estudiamos hacia qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima hacia x_0 por valores ligeramente superiores a x_0, estamos calculando el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0 **por la derecha**, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Análogamente, cuando estudiamos hacia qué valor se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima hacia x_0 por valores ligeramente inferiores a x_0, estamos calculando el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** x_0 **por la izquierda**, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$. Decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ son los **límites laterales** de $f(x)$ en x_0. El límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si y sólo si existen y coinciden ambos límites laterales, en cuyo caso el valor del límite es exactamente el de los límites laterales:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

En Fig.1.6 tenemos dos funciones, $f(x)$ (izquierda) y $g(x)$ (derecha). La función de la izquierda tiene límite en x_0, y el valor de dicho límite es ℓ. Sin embargo, la función de la derecha no tiene límite en x_0: mientras que por la derecha de x_0, $g(x)$ tiende al valor ℓ, por la izquierda de x_0, $g(x)$ tiende a otro valor. Es interesante observar, también, que aunque para la función de la izquierda tenemos $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, sin embargo $f(x_0) \neq \ell$. Esto tiene que ver con la noción de **continuidad**, que revisaremos más adelante.

En el caso de funciones de dos variables, la situación es mucho más difícil: cuando escribimos $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$, intuitivamente estamos preguntándonos por lo mismo que nos preguntábamos en el caso de funciones de una variable: ¿hacia qué valor se aproxima $f(x,y)$, a medida que nos aproximamos al punto (x_0, y_0)? Este problema es mucho más difícil que el anterior porque, en una variable, no hay más que dos maneras de aproximarse

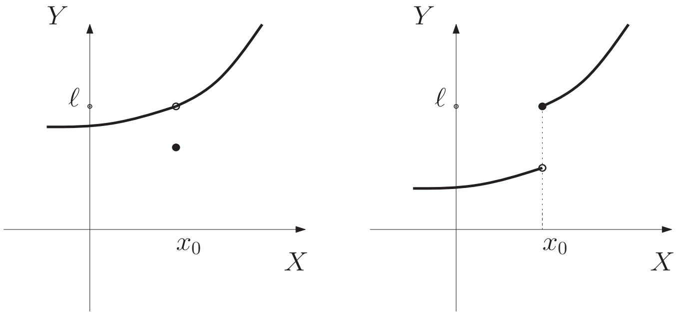

Figura 1.6: Límite de una función de una variable

a un valor x_0, por la derecha y por la izquierda (Fig. 1.5). Sin embargo, hay *infinitas maneras* de aproximarse a un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$!! En Fig. 1.7, izquierda, hemos fijado $(x_0, y_0) = (0, 0)$: con distintos colores, hemos marcado distintos caminos que conducen a $(0, 0)$. Si ahora tomamos una función $f(x, y)$, cuya gráfica aparece en Fig. 1.7, derecha, cada uno de esos caminos determina una cierta curva sobre la gráfica de la función, marcada con el mismo color; por lo tanto, al avanzar por el camino, digamos, azul, en el plano XY, hacia el $(0, 0)$, vamos generando puntos de la curva azul sobre la gráfica de la función, que van avanzando también hacia un punto concreto. Para ver si la función tiene límite, todos esos caminos, azul, rojo, verde, etc. (esos infinitos caminos) en el plano XY deben dar lugar a curvas sobre la gráfica de la función que confluyan en un mismo punto, como sucede en el caso de la Fig. 1.7, derecha. Si algunos caminos conducen a un cierto valor, y otros a otro, entonces diremos que la función $f(x, y)$ no tiene límite en el punto (x_0, y_0) considerado.

En particular, para calcular $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ sustituiremos $x = x_0, y = y_0$ en $f(x, y)$: si no obtenemos ninguna indeterminación (es decir, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, etc.), ya tendremos el valor del límite. Si aparece alguna indeterminación, entonces hay que estudiar el valor del límite. Eso requiere de técnicas más sofisticadas que las que se utilizaron en el caso de una variable, que no veremos aquí.

Ejemplo 4. *Consideremos la función* $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$. *Entonces*

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2 + y^2 + 2) = 0^2 + 0^2 + 2 = 2.$$

De hecho, cuando nos aproximamos a $(0, 0)$ *por cualquier dirección, las imágenes de los puntos correspondientes siempre se van aproximando al valor 2. En la Fig. 1.8 se muestra la gráfica de la función* $f(x, y)$*, las rectas* $y = x$, $y = -x$ *en el plano* XY *(en rojo), y las imágenes de los puntos de esas rectas mediante la función* f*, que corresponden a parábolas (en color negro) que viven sobre la gráfica de la función. Al movernos por las rectas* $y = x$ *o* $y = -x$ *hacia el origen, las imágenes de los puntos se deslizan por las parábolas hacia abajo, hacia el punto* $(0, 0, 2)$.